

TEORIA TOMITY-TAKESAKEGO WĘGLUG RIEFFELA-VAN DAELE'A

PIOTR MIKOŁAJ SOŁTAN

CONTENTS

Początek	1
1. Para podprzestrzeni w rzeczywistej przestrzeni Hilberta	1
1.1. Charakteryzacja operatora J	3
2. Jedna rzeczywista podprzestrzeń zespolonej przestrzeni Hilberta	4
3. Grupa modularna	5
4. Warunek K.M.S.	6
5. Algebry von Neumanna	11
6. Teoria Tomity-Takesakiego	12
Dodatek I: kilka słów o funkcjach holomorficznym	20
Dodatek II: rozkład biegunowy nad $\mathbb{R}$	21

POCZĄTEK

Niniejsze notatki prezentują część wyników z pracy M.A. Rieffel, A. Van Daele: “A bounded operator approach to Tomita-Takesaki theory”, *Pac. J. Math.* **69** No. 1 (1977), 187–221. Zawężymy zainteresowanie do tak zwanej “teorii Tomity-Takesakiego dla stanów”. Ponadto zamienimy część konwencji stosowanych w omawianej pracy. W szczególności iloczyny skalarne w przestrzeniach Hilberta nad $\mathbb{C}$ będą zawsze liniowe względem *drugiego* argumentu. W wielu rozumowaniach autorzy pracy badają przedłużenia holomorficzne pewnych funkcji zdefiniowanych na $\mathbb{R}$ na dolną półpłaszczyznę (lub jej część). My będziemy raczej stosowali przedłużenia holomorficzne na górną półpłaszczyznę.

W naszej prezentacji wyników wspomnianej wyżej pracy skocystamy z wygodnej notacji związanej z teorią spektralną operatorów na przestrzeniach Hilberta. Jeśli H jest (zespoloną) przestrzenią Hilberta, a A operatorem samosprężonym na H , to dla rzeczywistej stałej c symbol $\chi(A > c)$ będzie oznaczał rzut ortogonalny na podprzestrzeń spektralną A wyznaczoną przez podzbiór $]c, +\infty[\subset \mathbb{R}$. Analogicznie symbolem $H(A > c)$ będziemy oznaczać obraz tego rzutu.

1. PARA PODPRZESTRZENI W RZECZYWISTEJ PRZESTRZENI HILBERTA

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta nad $\mathbb{R}$ i niech $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ będzie parą domkniętych podprzestrzeni $\mathcal{H}$ takich, że

- $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \{0\}$,
- podprzestrzeń $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ jest gęsta w $\mathcal{H}$.

Taka para podprzestrzeni definiuje następujące operatory:

- P — rzut ortogonalny na $\mathcal{K}$,
- Q — rzut ortogonalny na $\mathcal{L}$,
- $R = P + Q$,
- $X = P - Q$.

Date: Październik 2011.

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski.

Uwaga 1.1. Operator X jest iniektywny: założmy, że $X\xi = 0$. Oznacza to, że $P\xi = Q\xi$, a więc $P\xi = Q\xi = 0$. Warunek $P\xi = 0$ oznacza, że $\xi \in \mathcal{K}^\perp$, a $Q\xi = 0$ oznacza $\xi \in \mathcal{L}^\perp$. Stąd $\xi \in (\mathcal{K} + \mathcal{L})^\perp = \{0\}$.

Niech

$$X = JT$$

będzie rozkładem biegunowym operatora X . Operator T jest dodatni (a więc samosprężony), a J jest ortogonalny, tj. $J^*J = JJ^* = \mathbb{1}$, ponadto $J^2 = \mathbb{1}$. Zauważmy też, że T jest iniektywny oraz X , T i J są przemienne (bo X jest samosprężony, a więc J i T są funkcjami od X).

Stwierdzenie 1.2.

- (1) Mamy $0 \leq R \leq 2\mathbb{1}$ oraz $\ker R = \ker(2\mathbb{1} - R) = \{0\}$;
- (2) $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$;
- (3) J jest ortogonalnym operatorem samosprężonym, a co za tym idzie $J^2 = \mathbb{1}$;
- (4) T jest przemienne z P , Q , R i J ;
- (5) mamy

$$JP = (\mathbb{1} - Q)J,$$

$$JQ = (\mathbb{1} - P)J,$$

$$JR = (2\mathbb{1} - R)J.$$

Dowód. Ad (1). Mamy oczywiście $R = P + Q \leq 2\mathbb{1}$ i $R \geq 0$. Założmy, że $R\xi = 0$. Wówczas mamy

$$\|P\xi\|^2 + \|Q\xi\|^2 = (\xi|P\xi) + (\xi|Q\xi) = (\xi|R\xi) = 0.$$

Zatem $P\xi = Q\xi = 0$ i tak jak w uwadze 1.1 mamy $\xi = 0$.

Rozważmy parę $(\mathcal{L}^\perp, \mathcal{K}^\perp)$. Para ta spełnia te same warunki, co para $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Istotnie:

- jeśli $\xi \in (\mathcal{L}^\perp \cap \mathcal{K}^\perp)$, to $\xi \perp (\mathcal{K} + \mathcal{L})$, a więc $\xi = 0$,
- jeśli $\xi \perp (\mathcal{L}^\perp + \mathcal{K}^\perp)$, to $\xi \perp \mathcal{L}^\perp$ i $\xi \perp \mathcal{K}^\perp$, a stąd $\xi \in \mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \{0\}$; innymi słowy podprzestrzeń $\mathcal{L}^\perp + \mathcal{K}^\perp$ jest gęsta w $\mathcal{H}$.

Teraz zauważmy, że przejście od $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ do $(\mathcal{L}^\perp, \mathcal{K}^\perp)$ zamienia R na $2\mathbb{1} - R$. W szczególności $\ker(2\mathbb{1} - R) = \{0\}$.

Ad (2). Mamy

$$T^2 = TJ^*JT = X^*X = (P - Q)(P - Q) = P - PQ - QP + Q$$

oraz

$$\begin{aligned} R(2\mathbb{1} - R) &= (P + Q)(2\mathbb{1} - P - Q) = 2P + 2Q - P - PQ - QP - Q \\ &= P - PQ - QP + Q, \end{aligned}$$

czyli $T^2 = R(2\mathbb{1} - R)$, a co za tym idzie

$$T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}.$$

Ad (3). Cały ten punkt był już omówiony — jest on konsekwencją procedury rozkładu biegunowego.

Ad (4). T komutuje z J . Komutuje też z R , bo jest funkcją tego operatora. T komutuje też z X , więc musi komutować z X . Skoro komutuje z X i R , to komutuje z P i Q .

Ad (5). Pamiętając, że T komutuje z P obliczamy

$$JPT = JTP = XP = (P - Q)P = P - QP = (\mathbb{1} - Q)(P - Q) = (I - Q)X = (\mathbb{1} - Q)JT$$

czyli $JP = (\mathbb{1} - Q)J$ na obrazie T . Obraz ten jest gęsty, bo $\ker T = \{0\}$ i $T^* = T$. Stąd

$$JP = (\mathbb{1} - Q)J. \tag{1}$$

Biorąc sprzężenia obu stron (1) otrzymujemy $PJ = J(\mathbb{1} - Q)$ czyli

$$JQ = (\mathbb{1} - P)J. \tag{2}$$

Wreszcie

$$JR = J(P + Q) = (\mathbb{1} - Q)J + (\mathbb{1} - P)J = (2\mathbb{1} - P - Q)J = (2\mathbb{1} - R)J.$$

□

Uwaga 1.3. Z punktu (5) stwierdzenia 1.2 wynika, że $J\mathcal{K} = \mathcal{L}^\perp$ i $J\mathcal{L} = \mathcal{K}^\perp$. Istotnie, weźmy $\xi \in \mathcal{K}$. Wówczas $J\xi = JP\xi = (\mathbb{1} - Q)J\xi \in \mathcal{L}^\perp$, co pokazuje, że $J\mathcal{K} \subset \mathcal{L}^\perp$. Natomiast przepisując korzystając ze wzoru $JQ = (\mathbb{1} - P)J$ przepisanego jako $J(\mathbb{1} - Q) = PJ$ dla $\eta' \in \mathcal{L}^\perp$ otrzymujemy $J\eta' = J(\mathbb{1} - Q)\eta' = PJ\eta'$, czyli $J\mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{K}$. Równość $J\mathcal{K} = \mathcal{L}^\perp$ dostajemy korzystając z tożsamości $J^2 = \mathbb{1}$. Dokładnie tak samo otrzymujemy $J\mathcal{L} = \mathcal{K}^\perp$.

1.1. Charakteryzacja operatora J .

Stwierdzenie 1.4. J jest jedynym operatorem takim, że

- J jest samosprzężony i ortogonalny,
- $J\mathcal{K} = \mathcal{L}^\perp$,
- $(\xi|J\xi) \geq 0$ dla wszystkich $\xi \in \mathcal{K}$,
- $(\eta|J\eta) \leq 0$ dla wszystkich $\eta \in \mathcal{L}$.

Dowód. Wiemy już, że J spełnia dwa pierwsze warunki. Dalej

$$PJJP = P(JP) = P(\mathbb{1} - Q)J = P(P - Q)J = PXJ = PT.$$

Operatory P i T są dodatnie i przemienne, więc $PT \geq 0$, czyli $PJP \geq 0$. To znaczy dokładnie, że

$$(\xi|J\xi) \geq 0$$

dla wszystkich $\xi \in \mathcal{K}$.

Podobnie

$$QJQ = (QJ)Q = J(\mathbb{1} - P)Q = J(Q - P)Q = -JXP = -TQ \leq 0,$$

co daje

$$(\eta|J\eta) \leq 0$$

dla wszystkich $\eta \in \mathcal{L}$.

Niech teraz I spełnia

- $I = I^* = I^{-1}$,
- $I\mathcal{K} = \mathcal{L}^\perp$,
- $(\xi|I\xi) \geq 0$ dla wszystkich $\xi \in \mathcal{K}$,
- $(\eta|I\eta) \leq 0$ dla wszystkich $\eta \in \mathcal{L}$.

Wówczas

$$IP = (\mathbb{1} - Q)I, \tag{3}$$

oraz $PIP \geq 0$ i $QIQ \leq 0$. Równanie (3) można przepisać jako $QI = I(\mathbb{1} - P)$, co po sprzężeniu daje

$$IQ = (\mathbb{1} - P)I. \tag{4}$$

Korzystając z (3) i (4) mamy:

$$JIP = J(\mathbb{1} - Q)I = PJI,$$

$$JIQ = J(\mathbb{1} - P)I = QJI,$$

czyli JI komutuje z P i Q . Zatem JI komutuje również z $X = P - Q$ i $R = P + Q$, a więc i z $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$. Musi zatem komutować także z J :

$$JIJ = JJI = I$$

(bo $JIJT = JIX = XJI = JTI = JJI$, a obraz T jest gęsty). Mnożąc powyższe równanie z prawej przez J otrzymujemy

$$JI = IJ.$$

Teraz zauważamy, że

$$\begin{aligned} JI \cdot RT &= RTJI = RXI \\ &= (P + Q)(P - Q)I = (P - PQ + QP - Q)I \\ &= (P(\mathbb{1} - Q) - Q(\mathbb{1} - P))I \\ &= P(\mathbb{1} - Q)I - Q(\mathbb{1} - P)I = PIP - QIQ \geq 0. \end{aligned}$$

Teraz jednoznaczność rozkładu biegunowego (dodatniego operatora $JIRT$) pokazuje, że $JI = \mathbb{1}$, czyli $I = J$. $\square$

2. JEDNA RZECZYWISTA PODPRZESTRZEŃ ZESPOLONEJ PRZESTRZENI HILBERTA

Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta. H jest również rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\Re(\cdot|\cdot)$. Niech $\mathcal{K}$ będzie rzeczywistą domkniętą podprzestrzenią H taką, że

- $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$,
- podprzestrzeń $\mathcal{K} + i\mathcal{K}$ jest gęsta w H .

Para $(\mathcal{K}, i\mathcal{K})$ definiuje ograniczone $\mathbb{R}$ -liniowe operatory

$$P, Q, R, X, J, T$$

na H .

Stwierdzenie 2.1. *Operatory R i T są $\mathbb{C}$ -liniowe,*

$$0 \leq R \leq 2\mathbb{1}, \quad T \geq 0, \quad (5)$$

natomiast operator J jest antyliniowy i samosprężony (jako operator antyliniowy), tj.

$$(\xi|J\eta) = (\eta|J\xi)$$

dla wszystkich $\xi, \eta \in H$.

Uwaga 2.2. Niech φ będzie antyliniowym funkcjonałem na zespolonej przestrzeni wektorowej X . Wówczas φ jest wyznaczony jednoznacznie przez swoją część rzeczywistą, gdyż z jednej strony, dla $x \in X$

$$\varphi(ix) = -i\varphi(x) = -i(\Re\varphi(x) + i\Im\varphi(x)) = (\Im\varphi)(x) - i(\Re\varphi)(x),$$

a z drugiej

$$\varphi(ix) = (\Re\varphi)(ix) + i(\Im\varphi)(ix).$$

Zatem $(\Im\varphi)(x) = (\Re\varphi)(ix)$ dla wszystkich $x \in X$. Jeśli $(\cdot|\cdot)$ jest iloczynem skalarnym na X , to kładąc $\varphi(x) = (x|y)$ dla pewnego ustalonego y mamy

$$(x|y) = \varphi(x) = (\Re\varphi)(x) + i(\Im\varphi)(x) = \Re(x|y) + i(\Re\varphi)(ix) = \Re(x|y) + i\Re(ix|y).$$

Tak więc iloczyn skalarny z ustalonym wektorem wyraża się przez część rzeczywistą iloczynu skalarnego.

Dowód stwierdzenia 2.1. P jest rzutem na $\mathcal{K}$ (ortogonalnym względem $\Re(\cdot|\cdot)$), a Q jest rzutem na $i\mathcal{K}$. Zatem $P = i \circ Q \circ i^{-1}$ i $P = i^{-1} \circ Q \circ i$. Zatem $iP = Qi$ oraz $Pi = iQ$. Stąd

$$iR = iP + iQ = Qi + Pi = Ri.$$

Dalej $T = f(R)$, gdzie $f(r) = \sqrt{r(2-r)}$ ($r \in [0, 2]$), więc T także jest $\mathbb{C}$ -liniowy (jako normowa granica wielomianów od R).

Pokażemy teraz, że $R = R^*$ w sensie sprzężenia względem zespolonego iloczynu skalarnego na H . Pamiętamy, że R jest samosprężony dla $\Re(\cdot|\cdot)$, a więc dla dowolnych $\xi, \eta \in H$

$$\begin{aligned} (\xi|R\eta) &= \Re(\xi|R\eta) + i\Re(i\xi|R\eta) = \Re(R\xi|\eta) + i\Re(Ri\xi|\eta) = \Re(R\xi|\eta) + i\Re(iR\xi|\eta) \\ &= \Re(R\xi|\eta) + i\Re(-i(R\xi|\eta)) = \Re(R\xi|\eta) + i\Im(R\xi|\eta) = (R\xi|\eta). \end{aligned}$$

Teraz, skoro $(\xi|R\xi) = (R\xi|\xi)$, mamy $(\xi|R\xi) = \Re(\xi|R\xi) \geq 0$, czyli $R \geq 0$ w C^* -algebrze $B(H)$. Tak samo pokazujemy $T \geq 0$ oraz, że $2\mathbb{1} - R \geq 0$ w $B(H)$, czyli nierówności (5) są spełnione w $B(H)$.

Operator X jest antyliniowy:

$$iX - i(P - Q) = Qi - Pi = -(P - Q)i = -Xi.$$

Skoro $T = JX$, operator J musi być antyliniowy.

Ponadto J jest samosprężony dla iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)$. Zatem, na mocy uwagi 2.2

$$\begin{aligned} (\xi|J\eta) &= \Re(\xi|J\eta) + i\Re(i\xi|J\eta) = \Re(J\xi|\eta) + i\Re(Ji\xi|\eta) = \Re(J\xi|\eta) - i\Re(iJ\xi|\eta) \\ &= \Re(J\xi|\eta) - i\Re(-i(J\xi|\eta)) = \Re(J\xi|\eta) + i\Re(i(J\xi|\eta)) \\ &= \Re(J\xi|\eta) - i\Im(J\xi|\eta) = \overline{(J\xi|\eta)} = (\eta|J\xi). \end{aligned}$$

□

Wiemy już, że J jest operatorem antyliniowym i samosprężonym. Ponieważ $J^2 = \mathbb{1}$, mamy

$$JJ^* = J^*J = \mathbb{1}.$$

Operatory takie nazywamy *antyunitarnymi*.

Przypominamy, że operator R spełnia $0 \leq R \leq 2\mathbb{1}$ oraz $\ker R = \ker(2\mathbb{1} - R) = \{0\}$.

3. GRUPA MODULARNA

Definicja 3.1. Dla $t \in \mathbb{R}$ definiujemy $\Delta^{it} = R^{it}(2\mathbb{1} - R)^{-it}$.

Analizując własności odwzorowania

$$t \longmapsto R^{it}(2\mathbb{1} - R)^{-it}$$

można wykazać, że istnieje dodatni i samosprężony operator Δ na H taki, że $R^{it}(2\mathbb{1} - R)^{-it} = \Delta^{it}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ (twierdzenie Stone'a). Dla nas jednak sam operator Δ nie będzie istotny. Będziemy jednak używali oznaczenia " Δ^{it} ", aby pozostać w zgodzie z tradycją teorii Tomity-Takesakiego.

Dygresja 3.2. Niech $A \in B(H)$ będzie operatorem dodatnim o zerowym jądrze. Dla $z \in \mathbb{C}$ takiego, że $\Im z \leq 0$ definiujemy $F(z) = A^{iz}$. Innymi słowy $F(z) = f_z(A)$, gdzie f_z jest funkcją ciągłą na $\text{Sp } A$ daną wzorem:

$$f_z(r) = \exp(iz \log(r))$$

dla $r > 0$ (ponieważ $\ker A = \{0\}$, wartość f_z w punkcie $r = 0$ jest nieistotna). Funkcja F ma następujące własności:

- (1) jest mocna ciągła i (normowo) ograniczona poziomych paskach o skończonej szerokości,
- (2) jest analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$.

Na początek zauważmy, że dla $r > 0$ mamy

$$|e^{iz \log(r)}| = r^{-\Im z},$$

a więc $\|F(z)\| \leq \|A\|^{-\Im z}$ (czyli w szczególności $F(z) \in B(H)$) i funkcja F jest ograniczona na poziomach paskach skończonej szerokości. Weźmy $\xi \in H$, $\varepsilon > 0$. Operator $A_\varepsilon = A|_{H(A>\varepsilon)}$ ma ograniczony logarytm. Dalej oznaczając $\xi_\varepsilon = \chi(A > \varepsilon)\xi$ mamy

$$F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi = f_z(A_\varepsilon)\xi_\varepsilon = \exp(iz \log(A_\varepsilon))\xi_\varepsilon,$$

a więc dla $\eta \in H$

$$(\eta|F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi) = \left(\eta \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz \log(A_\varepsilon))^n}{n!} \xi_\varepsilon \right. \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (\eta|i^n(\log A_\varepsilon)^n \xi_\varepsilon).$$

Widzimy więc, że jest to funkcja ciągła na $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$ i analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$. Dalej, ponieważ $\ker A = \{0\}$, mamy

$$\chi(A > \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{\text{strong}} \mathbb{1},$$

a więc

$$F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} A^{iz}\xi.$$

a ponadto zbieżność ta jest jednostajna względem z na poziomach paskach skończonej szerokości:

$$\|F(z)\chi(A > \varepsilon)\xi - F(z)\xi\| \leq \|F(z)\| \|\chi(A > \varepsilon)\xi - \xi\|.$$

Tak więc funkcja $z \mapsto A^{iz}\xi$ jest niemal jednostajną granicą funkcji ciągłych na $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \leq 0\}$ i analitycznych na $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$.

Dygresja 3.3. W dalszym ciągu będziemy rozważać również funkcje holomorfczne o wartościach w H . Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}$ i niech $F: \Omega \rightarrow H$. Powiemy, że F jest holomorfczna, jeśli dla każdego $\xi \in H$ funkcja

$$\Omega \ni z \mapsto (\xi | F(z))$$

jest holomorfczna. Jeśli F jest Holomorfczna, to funkcja

$$\overline{\Omega} \ni w \mapsto \overline{(\xi | F(\overline{w}))} = (F(\overline{w}) | \xi)$$

też jest holomorfczna. Będziemy z tego często korzystać.

Podobnie, jeśli F_1 i F_2 są funkcjami holomorfcznymi o wartościach w H , to funkcja

$$z \mapsto (F_1(\overline{z}) | F_2(z))$$

także jest holomorfczna (na odpowiedniej dziedzinie).

Dygresja 3.4. Niech $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ i $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$ będą przemiennymi, mocno ciągłymi jednoparametrowymi grupami unitarnymi działającymi na przestrzeni Hilberta H . Wówczas $t \mapsto U_t V_t$ jest mocno ciągłą jednoparametrową grupą unitarną. Fakt, że jest to grupa wynika z przemienności grup $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ i $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$, natomiast ciągłość z oszacowania

$$\|U_t V_t \xi - \xi\| \leq \|U_t V_t \xi - U_t \xi\| + \|U_t \xi - \xi\| = \|V_t \xi - \xi\| + \|U_t \xi - \xi\|.$$

Powyższa dyskusja pokazuje, że $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ jest mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na H . W kontekście teorii Tomity-Takesakiego grupę tę nazywa się zazwyczaj *grupą modularną*.

Stwierdzenie 3.5.

- (1) $\Delta^{it} J = J \Delta^{it}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$,
- (2) $\Delta^{it} \mathcal{K} = \mathcal{K}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Ustalmy $t \in \mathbb{R}$.

Ad (1). Mamy $JR = (2\mathbb{1} - R)J$ (stwierdzenie 1.2(5)). Zatem dla każdej funkcji ciągłej f na $\text{Sp } R$ mamy

$$Jf(R)J = \overline{f}(JRJ) = \overline{f}(2\mathbb{1} - R)$$

(bo tak jest dla wielomianów; zauważmy, że $\text{Sp } R = \text{Sp}(2\mathbb{1} - R)$). Funkcja mierzalna $r \mapsto r^{it}$ jest punktową granicą funkcji ciągłych, a więc R^{it} jest mocną granicą funkcji ciągłych od R . Stąd

$$JR^{it}R = (2\mathbb{1} - R)^{it}$$

W konsekwencji (korzystamy z tego, że $J^2 = \mathbb{1}$)

$$\begin{aligned} J\Delta^{it}J &= JR^{it}JJ(2\mathbb{1} - R)^{-it}J \\ &= (2\mathbb{1} - R)^{-it}J(2\mathbb{1} - R)^{-it}J \\ &= (2\mathbb{1} - R)^{-it}R^{it} = \Delta^{it}. \end{aligned}$$

Ad (2). Δ^{it} jest funkcją od R , więc komutuje z R , a więc i z $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$. Na mocy (1) Δ^{it} komutuje z J , a więc komutuje z $X = JT$. Skoro Δ^{it} komutuje z X i R , to komutuje także z P (i Q). W szczególności $\Delta^{it}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. Ponieważ jest to prawdą także dla Δ^{-it} , mamy $\Delta^{it}\mathcal{K} = \mathcal{K}$. $\square$

4. WARUNEK K.M.S.

Definicja 4.1. Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta i niech $\mathcal{K}$ będzie rzeczywistą domkniętą podprzestrzenią H taką, że

- $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$,
- podprzestrzeń $\mathcal{K} + i\mathcal{K}$ jest gęsta w H .

Dalej, niech $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ będzie mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na H . Powiemy, że grupa $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem podprzestrzeni $\mathcal{H}$, jeśli dla dowolnych $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$ taka, że

- $f(t) = (\xi|U_t\eta)$,
- $f(t+i) = (U_t\eta|\xi)$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Zauważmy od razu, że jeśli dla pewnych ξ i η funkcja f jak w definicji 4.1 istnieje, to jest ona jedyna. Istotnie, jeśli g byłaby inną taką funkcją, to $f-g$ byłaby analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$ i równa 0 na prostej rzeczywistej. Stąd f i g musiałby być sobie równe na całej swojej dziedzinie.

Stwierdzenie 4.2. *Jednoparametrowa grupa $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja*

$$f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < \frac{1}{2}\}$ taka, że

- $f(t) = (\xi|U_t\eta)$,
- $f(t + \frac{i}{2}) \in \mathbb{R}$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Dowód. Niech $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek se sformułowania stwierdzenia. Wówczas dla $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < \frac{1}{2}\}$ taka, że $f(t) = (\xi|U_t\eta)$ oraz $f(t + \frac{i}{2}) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Stosując zasadę symetrii otrzymamy funkcję

$$\tilde{f}: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

taką, że

- $\tilde{f}(z) = f(z)$ dla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\}$,
- $\tilde{f}(w) = \overline{f(\overline{w} + i)}$ dla $w \in \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \leq \Im z \leq 1\}$.

Sprawdźmy, że wówczas $\tilde{f}$ jest funkcją K.M.S. dla ξ i η : dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $\tilde{f}(t) = f(t) = (\xi|U_t\eta)$ oraz

$$\tilde{f}(t+i) = \overline{f(\overline{t})} = (U_t\eta|\xi).$$

Zatem $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{H}$.

Założmy teraz, że $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{H}$. Niech $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ i niech $f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie odpowiednią funkcją K.M.S. Zdefiniujmy

$$g: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

kładąc

$$g(z) = \overline{f(\overline{z} + i)}.$$

Wówczas g także jest funkcją K.M.S. dla ξ i η : jest ona ciągła i ograniczona na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i analityczna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$, a ponadto dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$g(t) = \overline{f(t+i)} = \overline{(\xi|U_t\eta)} = (\xi|U_t\eta),$$

$$g(t+i) = \overline{f(t)} = \overline{(\xi|U_t\eta)} = (U_t\eta|\xi).$$

Stąd $f = g$, a więc w szczególności $g(t + \frac{i}{2}) = f(t + \frac{i}{2})$, czyli

$$\overline{f((t + \frac{i}{2}) + i)} = f(t + \frac{i}{2})$$

lub inaczej $f(t + \frac{i}{2}) = \overline{f(t + \frac{i}{2})}$. □

Lemat 4.3. Niech $\eta \in \mathcal{H}$. Wówczas $\eta = R^{\frac{1}{2}}\zeta$, gdzie

$$\zeta = \frac{1}{2}(R^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J)\eta.$$

Dowód. Mamy $\eta = P\eta$, a więc

$$\begin{aligned} \eta &= P\eta = \frac{1}{2}(P + Q + P - Q)\eta \\ &= \frac{1}{2}(R + X)\eta \\ &= \frac{1}{2}(R + JT)\eta \\ &= \frac{1}{2}(R + TJ)\eta \\ &= \frac{1}{2}(R + R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J)\eta \\ &= R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}(R^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J)\eta\right). \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy po kolei z tego, że $JT = TJ$, oraz że

$$T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Twierdzenie 4.4. Grupa $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{H}$.

Dowód. Niech $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ i niech

$$f(t) = (\xi | \Delta^{it}\eta).$$

Rozszerzymy f na pasek $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\}$. Korzystamy z lematu 4.3:

$$\begin{aligned} f(t) &= (\xi | \Delta^{it}\eta) = (\xi | \Delta^{it}R^{\frac{1}{2}}\zeta) \\ &= (\xi | R^{it}(2\mathbb{1} - R)^{-it}R^{\frac{1}{2}}\zeta) \\ &= (\xi | R^{i(t-\frac{1}{2})}(2\mathbb{1} - R)^{-it}\zeta). \end{aligned}$$

Powyższy rachunek podpowiada nam, aby dla $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\}$ zdefiniować

$$f(z) = (\xi | R^{i(z-\frac{1}{2})}(2\mathbb{1} - R)^{-iz}\zeta)$$

(dla takich z mamy $\Im(z - \frac{1}{2}), \Im(-z) \leq 0$, więc operatory $R^{i(z-\frac{1}{2})}$ oraz $(2\mathbb{1} - R)^{-iz}$ są dobrze zdefiniowane i zależą holomorficznie od z na mocy dyskusji zawartej w dygresji 3.2.

Aby spełniony był warunek K.M.S. wartości f na prostej $\mathbb{R} + \frac{1}{2}$ muszą być rzeczywiste. Mamy

$$f(t + \frac{1}{2}) = (\xi | R^{it}(2\mathbb{1} - R)^{-it}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta).$$

Obliczamy

$$(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta = (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(R^{\frac{1}{2}} + (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}J)\eta = \frac{1}{2}((2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}\eta + (2\mathbb{1} - R)J\eta).$$

Na mocy wzoru $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$ (stwierdzenie 1.2(2)) mamy więc

$$(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta = \frac{1}{2}(T\eta + (2\mathbb{1} - R)J\eta),$$

a dalej

$$\begin{aligned} (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta &= \frac{1}{2}(XJ\eta + (2\mathbb{1} - R)J\eta) \\ &= \frac{1}{2}(X + 2\mathbb{1} - R)J\eta \\ &= \frac{1}{2}(P - Q + 2\mathbb{1} - P - Q)J\eta \\ &= (\mathbb{1} - Q)J\eta = JP\eta = J\eta. \end{aligned}$$

Tak więc

$$f(t + \frac{1}{2}) = (\xi | \Delta^{it}J\eta) = (\Delta^{-it}\xi | J\eta) = \Re(\Delta^{-it}\xi | J\eta) + i\Im(\Delta^{-it}\xi | J\eta).$$

Wiemy, że J przeprowadza $\mathcal{K}$ na dopełnienie ortogonalne $i\mathcal{K}$ względem iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)$. Mamy więc

$$\Im(\Delta^{-it}\xi|J\eta) = \Re(i\Delta^{-it}\xi|J\eta) = 0,$$

bo $\Delta^{it}\xi \in \mathcal{K}$ dla wszystkich t . Stąd $f(t + \frac{i}{2}) \in \mathbb{R}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Twierdzenie 4.5. *Niech $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ będzie mocno ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych taką, że $U_t\mathcal{K} = \mathcal{K}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Jeśli $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{K}$, to $U_t = \Delta^{it}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.*

Dowód. W podprzestrzeni $\mathcal{K}$ jest gęsta podprzestrzeń wektorów całkowitych: dla $\xi \in \mathcal{K}$ i $n \in \mathbb{N}$ wektor

$$\xi_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} U_t \xi dt$$

należy do $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ jest domknięta, a $\sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \in \mathbb{R}$), jest całkowity. Ponadto $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi$.

Niech więc $\xi \in \mathcal{K}$ będzie całkowity dla $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ i niech $h: \mathbb{C} \rightarrow H$ będzie funkcją całkowitą taką, że $h(t) = U_t \xi$ dla $t \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcja h jest ograniczona na poziomych paskach skończonej szerokości: funkcje

$$z = t + is \mapsto h(t + is) \quad \text{oraz} \quad z = t + is \mapsto U_t h(is)$$

są całkowite i równe na $\mathbb{R}$, a więc są równe.

Wykażemy, że dla $\eta \in \mathcal{K}$ mamy

$$(\Delta^{it} J\eta | U_t \xi) = (J\eta | \xi)$$

dla wszystkich t . Ponieważ $\Delta^{is}\mathcal{K} = \mathcal{K}$ (stwierdzenie 3.5), a $\mathcal{K}$ i $J\mathcal{K}$ są podzbiorami liniowo gęstymi w H , wynika stąd, że $U_t = \Delta^{it}$ (pamiętamy, że całkowite wektory, które są całkowite dla $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ są gęste w $\mathcal{K}$).

Zdefiniujmy funkcję $g: \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$g(z) = \left(R^{i\bar{z}} (2\mathbb{1} - R)^{-i(\bar{z} + \frac{1}{2})} \zeta | h(z) \right)$$

gdzie ζ jest wektorem z lematu 4.3 (czyli mamy $R^{\frac{1}{2}}\zeta = \eta$ oraz $(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}\zeta = J\eta$). Dzięki własnościom funkcji h i operatorów R oraz $2\mathbb{1} - R$, funkcja g jest ciągła i ograniczona na $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\}$ i holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C} | 0 < \Im z < \frac{1}{2}\}$ (patrz $\rightarrow$ dygresja 3.3).

Mamy

$$g(t) = \left(R^{it} (2\mathbb{1} - R)^{-it} (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}} \zeta | h(t) \right) = (\Delta^{it} J\eta | U_t \xi) = (J\eta | \Delta^{-it} U_t \xi).$$

Ponieważ zarówno $\Delta^{-it} U_t \xi$ jak i η należą do $\mathcal{K}$, mamy $g(t) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ (bo

$$\Im(J\eta | \Delta^{-it} U_t \xi) = \Re(iJ\eta | \Delta^{-it} U_t \xi) = -\Re(Ji\eta | \Delta^{-it} U_t \xi) = 0$$

jako że $J(i\mathcal{K})$ jest dopełnieniem ortogonalnym $\mathcal{K}$ dla $\Re(\cdot|\cdot)$).

Na drugim brzegu paska mamy z kolei:

$$g(t + \frac{i}{2}) = \left(R^{it} (2\mathbb{1} - R)^{-it} R^{\frac{1}{2}} \zeta | h(t + \frac{i}{2}) \right) = (\Delta^{it} \eta | h(t + \frac{i}{2})).$$

Wykażemy teraz, że $g(t + \frac{i}{2}) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. W tym celu skorzystamy z warunku K.M.S. dla grupy $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ względem $\mathcal{K}$. Dla ustalonego $s \in \mathbb{R}$ oraz pary wektorów $(\Delta^{is}\eta, \xi)$ z przestrzeni $\mathcal{K}$ istnieje funkcja

$$f: \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$$

ciągła i ograniczona na $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\}$, holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C} | 0 < \Im z < \frac{1}{2}\}$ oraz taka, że

$$f(t) = (\Delta^{is}\eta | U_t \xi).$$

i $f(t + \frac{i}{2}) \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Zauważmy dalej, że ponieważ

$$f(t) = (\Delta^{is}\eta | h(t)),$$

a h jest funkcją całkowitą, mamy

$$f(t + \frac{i}{2}) = (\Delta^{is}\eta|h(t + \frac{i}{2})).$$

W szczególności (kiedy $s = t$) mamy

$$g(t + \frac{i}{2}) = (\Delta^{it}\eta|h(t + \frac{i}{2})) \in \mathbb{R}$$

dla wszystkich t .

Wykazaliśmy więc, że g ma wartości rzeczywiste na prostych $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R} + \frac{i}{2}$. Ponieważ jest ona również ciągła i ograniczona na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq \frac{1}{2}\}$, korzystając z zasady symetrii Schwarza otrzymamy z g ograniczoną funkcję całkowitą. Innymi słowy g jest stała.

Zatem, w szczególności, dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy $g(t) = g(0)$, czyli

$$(\Delta^{it}J\eta|U_t\xi) = (J\eta|\xi).$$

□

Twierdzenie 4.6. *Niech $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ będzie mocna ciągłą jednoparametrową grupą operatorów unitarnych na przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$. Niech $\mathcal{K}_0$ będzie rzeczywistą (niekoniecznie domkniętą) podprzestrzenią $\mathbb{H}$ taką, że $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{K}_0$. Wówczas $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem najmniejszej domkniętej rzeczywistej podprzestrzeni $\mathcal{K} \subset \mathbb{H}$ niezmienniczej dla $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ i zawierającej $\mathcal{K}_0$. Ponadto $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$, a więc jeśli oznaczymy przez H domknięcie $\mathcal{K} + i\mathcal{K}$ i zdefiniujemy $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ na H tak jak powyżej, to H jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ i $U_t = \Delta^{it}$ na H dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $\mathcal{K}_1$ będzie zbiorem tych wektorów $\xi \in \mathbb{H}$, że dla każdego $\eta \in \mathcal{K}_0$ istnieje funkcja K.M.S. dla pary (η, ξ) , tj. istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$ taka, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(t) = (\eta|U_t\xi) = \overline{f(t+i)}.$$

Zachodzą następujące fakty

- $\mathcal{K}$ jest rzeczywistą podprzestrzenią $\mathbb{H}$: jeśli $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{K}$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ i f_1, f_2 są odpowiednimi funkcjami K.M.S., to $\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2$ jest funkcją K.M.S. dla $\theta_1 \xi_1 + \theta_2 \xi_2$, gdyż dla $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$(\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2)(t) = \theta_1 (\eta|U_t \xi_1) + \theta_2 (\eta|U_t \xi_2) = (\eta|U_t(\theta_1 \xi_1 + \theta_2 \xi_2))$$

oraz

$$(\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2)(t+i) = \theta_1 f_1(t+i) + \theta_2 f_2(t+i) = \overline{\theta_1 f_1(t)} + \overline{\theta_2 f_2(t)} = \overline{(\theta_1 f_1 + \theta_2 f_2)(t)}.$$

- $\mathcal{K}_1$ jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$: ustalmy $s \in \mathbb{R}$ i dla $\xi \in \mathcal{K}_1$ oraz $\eta \in \mathcal{K}_0$ niech f będzie funkcją K.M.S. dla (η, ξ) . Wówczas funkcja

$$g: z \longmapsto f(z+s).$$

Wówczas g jest ciągła i ograniczona na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$. Ponadto

$$g(t) = f(t+s) = (\eta|U_{t+s}\xi) = (\eta|U_t(U_s\xi))$$

oraz

$$g(t+i) = f(t+s_i) = \overline{f(t+s)} = \overline{g(t)}.$$

Zatem g jest funkcją K.M.S. dla $(\eta, U_s\xi)$. Zatem $U_s\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_1$.

- $\mathcal{K}_1$ jest domknięta: niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów $\mathcal{K}_1$ zbieżnym do $\xi \in \mathbb{H}$. Weźmy $\eta \in \mathcal{K}_0$ i niech $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie odpowiednim ciągiem funkcji K.M.S. Mamy

$$|f_n(t) - f_m(t)| = |(\eta|U_t(\xi_n - \xi_m))| \leq \|\eta\| \|\xi_n - \xi_m\|$$

oraz

$$|f_n(t+i) - f_m(t+i)| = |f_n(t) - f_m(t)| \leq \|\eta\| \|\xi_n - \xi_m\|.$$

Zatem, na mocy własności funkcji holomorficzych na pasku (patrz dodatek)

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \|\eta\| \|\xi_n - \xi_m\|$$

dla wszystkich z o części urojonej pomiędzy 0 a 1. Stąd funkcje $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tworzą ciąg zbieżny jednostajnie, a co za tym idzie jego granica f jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$. Jest ona także funkcją K.M.S. dla ξ . Istotnie,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta | U_t \xi_n) = (\eta | U_t \xi)$$

oraz

$$f(t + i) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t + i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U_t \xi_n | \eta) = (U_t \xi | \eta).$$

- $\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_0$.

Z powyższych warunków ewidentnie wynika, że $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$.

Wykazaliśmy, że dla każdego $\eta \in \mathcal{K}_0$ i $\xi \in \mathcal{K}_1$ istnieje odpowiednia funkcja K.M.S. dla (η, ξ) . Tym bardziej dla każdego $\eta \in \mathcal{K}_0$ i $\xi \in \mathcal{K}$ istnieje odpowiednia funkcja K.M.S. dla (η, ξ) .

Niech $\mathcal{K}_2$ będzie zbiorem tych $\eta \in \mathbb{H}$, że dla dowolnego $\xi \in \mathcal{K}$ istnieje funkcja K.M.S. dla pary (η, ξ) . Wówczas

- $\mathcal{K}_2$ jest rzeczywistą podprzestrzenią w $\mathbb{H}$,
- $\mathcal{K}_2$ jest niezmiennicza dla $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$,
- $\mathcal{K}_2$ jest domknięta,
- $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_2$.

Wynika stąd, że $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_2$. W szczególności grupa $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem $\mathcal{K}$.

Teraz wykażemy, że $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$. Weźmy $\xi \in \mathcal{K} \cap i\mathcal{K}$. Wówczas zarówno ξ jak i $i\xi$ należą do $\mathcal{K}$. Niech f będzie funkcją K.M.S. dla (ξ, ξ) , a g funkcją K.M.S. dla $(\xi, i\xi)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= (\xi | U_t \xi), & f(t + i) &= (U_t \xi | \xi), \\ g(t) &= (\xi | U_t (i\xi)), & g(t + i) &= (U_t (i\xi) | \xi). \end{aligned} \tag{6}$$

Z równości w pierwszej kolumnie wynika, że $g(z) = if(z)$ dla z z dziedziny obu funkcji. W szczególności

$$g(t + i) = if(t + i)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Ale druga kolumna (6) pokazuje, że $g(t + i) = -if(t + i)$. Stąd f jest równa 0 na $\mathbb{R} + i$, a więc jest stała (i równa 0). W szczególności

$$\|\xi\|^2 = f(0) = 0.$$

Oczywiście $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ zachowuje $H = \overline{\mathcal{K} + i\mathcal{K}}$, więc pozostałe punkty naszego twierdzenia wynikają z twierdzenia 4.5. $\square$

5. ALGEBRY VON NEUMANNA

Niech M będzie algebrą von Neumanna działającą na przestrzeni Hilberta H . Niech $\Omega \in \mathcal{H}$ będzie (jednostkowym) wektorem cyklicznym i separującym dla M . Dla dowolnego podzbioru $S \subset B(H)$, symbolem $S_{s.s.}$ będziemy oznaczać zbiór

$$\{s \in S \mid s = s^*\}.$$

Niech $\mathcal{K} = \overline{M_{s.s.}\Omega}$. Jest jasna, że

- $\mathcal{K}$ jest rzeczywistą podprzestrzenią w H ,
- $\mathcal{K} + i\mathcal{K}$ jest gęsta w H (cykliczność Ω).

Pokażemy teraz, że $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$.¹ Zanim to wykażemy sprawdzimy, że dla podzbioru $\mathcal{L} \subset H$ mamy

$$i(\mathcal{L})^{\perp_{\Re}} = (i\mathcal{L})^{\perp_{\Re}},$$

¹Jest absolutnie jasne, że $M_{s.s.}\Omega \cap iM_{s.s.}\Omega = \{0\}$: jeśli $a, b \in M_{s.s.}$ i $a\Omega = ib\Omega$, to $(a - ib)\Omega = 0$, czyli $a = ib$, bo Ω jest separujący dla M . To implikuje $a = b = 0$.

gdzie “ $\perp_{\Re}$ ” oznacza dopełnienie ortogonalne dla iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)$. Istotnie

$$\begin{aligned} i(\mathcal{L})^{\perp_{\Re}} &= \{i\xi \mid \forall \eta \in \mathcal{L} \Re(\eta|\xi) = 0\} \\ &= \{\xi' \mid \forall \eta \in \mathcal{L} \Re(\eta| -i\xi') = 0\} \\ &= \{\xi' \mid \forall \eta \in \mathcal{L} \Re(i\eta|\xi') = 0\} \\ &= \{\xi' \mid \forall \eta' \in i\mathcal{L} \Re(\eta'|\xi') = 0\} = (i\mathcal{L})^{\perp_{\Re}}. \end{aligned}$$

Na początek zauważmy, że $M'_{s.s.}\Omega \subset (i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}}$. Istotnie: dla $x' \in M'_{s.s.}$ i $x \in M_{s.s.}$ mamy

$$(x'\Omega|x\Omega) = (\Omega|x'x\Omega) = (\Omega|xx'\Omega) = (x\Omega|x'\Omega),$$

czyli $(x'\Omega|x\Omega) \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\Re(x'\Omega|ix\Omega) = \Re(i(x'\Omega|x\Omega)) = 0.$$

Mamy więc

$$M'\Omega = M'_{s.s.}\Omega + iM'_{s.s.}\Omega \subset i\mathcal{K}^{\perp_{\Re}} + \mathcal{K}^{\perp_{\Re}}.$$

Teraz

- $i\mathcal{K}^{\perp_{\Re}} + \mathcal{K}^{\perp_{\Re}} \subset (\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}}$. Istotnie: jeśli $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{K}^{\perp_{\Re}}$ oraz $\eta \in \mathcal{K} \cap i\mathcal{K}$ mamy $\Re(i\xi_1 + \xi_2|\eta) = \Re(i\xi_1|\eta) + \Re(\xi_2|\eta)$; drugi wyraz jest równy zero, bo $\eta \in \mathcal{K}$ i $\xi_2 \in \mathcal{K}^{\perp_{\Re}}$, a pierwszy $\Re(i\xi_1|\eta) = -\Re(\xi_1|i\eta)$ jest równy zero, gdyż $i\eta \in \mathcal{K}$ i $\xi_1 \in \mathcal{K}^{\perp_{\Re}}$.
- $(\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}} = (\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp}$. Istotnie, jeśli $\eta \in \mathcal{K} \cap i\mathcal{K}$, to $\eta, i\eta \in \mathcal{K} \cap i\mathcal{K}$. Stąd, dla $\xi \in (\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}}$, mamy

$$\Re(\xi|\eta) = \Re(i\eta|\xi) = 0.$$

Ale $\Re(i\eta|\xi) = \Im(\eta|\xi)$, czyli $(\eta, \xi) = 0$. To pokazuje, że

$$(\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}} \subset (\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp},$$

a przeciwne zawieranie jest oczywiste.

W końcu otrzymujemy

$$M'\Omega = M'_{s.s.}\Omega + iM'_{s.s.}\Omega \subset i\mathcal{K}^{\perp_{\Re}} + \mathcal{K}^{\perp_{\Re}} \subset (\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}} = (\mathcal{K} \cap i\mathcal{K})^{\perp}.$$

Ponieważ zbiór $M'\Omega$ jest gęsty w H , odostajemy $\mathcal{K} \cap i\mathcal{K} = \{0\}$.

Wykazaliśmy, że $\mathcal{K}$ spełnia założenia z części 2 (i dalszych). Mamy więc operatory

$$P, Q, R, X, J, T$$

oraz grupę modułarną $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$. Przystępujemy do dowodu najważniejszego twierdzenia teorii Tomity-Takesakiego:

Twierdzenie 5.1.

- (1) Dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$,
- (2) $JMJ = M'$.

6. TEORIA TOMITY-TAKESAKIEGO

Lemat 6.1. Niech $x' \in M'_{s.s.}$. Wówczas dla dowolnej liczby λ takiej, że $\Re\lambda > 0$ istnieje dokładnie jeden $x \in M_{s.s.}$ taki, że

$$(x'\Omega|y\Omega) = \Re(\lambda(x\Omega|y\Omega))$$

dla wszystkich $y \in M_{s.s.}$.

Dowód. Zaczniemy od następujących uproszczeń:

- możemy przyjąć, że $0 \leq x' \leq 1$, bo każdy x' jest $\mathbb{R}$ -kombinacją liniową takich,
- możemy przyjąć, że $\Re\lambda = 1$ (przeskalowanie).

Na razie $x \in M_{s.s.}$ będziemy traktować jako parametr. Definiujemy normalne (σ -słabo ciągłe) funkcjonały $\psi, \psi_x: M_{s.s.} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\psi(y) &= (x'\Omega|y\Omega), \\ \psi_x(y) &= \Re(\lambda(x\Omega|y\Omega))\end{aligned}$$

dla wszystkich $y \in M_{s.s.}$. Mamy wykazać, że istnieje dokładnie jeden $x \in M_{s.s.}$ taki, że

$$\psi = \psi_x.$$

Na początek skomentujmy jedyność: jeśli $\psi_{x_1} = \psi_{x_2}$, to $\psi_{x_1-x_2} = 0$. Tak więc pisząc $x = x_1 - x_2$, mamy w szczególności

$$\psi_x(x) = 0.$$

innymi słowy

$$0 = \Re(\lambda(x\Omega|x\Omega)) = \Re(\lambda)\|x\Omega\|^2,$$

czyli $x = 0$.

Dowodzimy teraz istnienia rzeczonego elementu x . Niech

$$V = \{\psi_x | x \in M_{s.s.}, \|x\| \leq 1\}.$$

V jest ewidentnie wypukłym podzbiorem $(M_*)_{s.s.}$ (każdy σ -słabo ciągły funkcjonal $M_{s.s.} \rightarrow \mathbb{R}$ rozszerza się jednoznacznie do normalnego i samosprzężonego funkcjonału na M). Jest on również zbiorem słabo zwartym,² gdyż odwzorowanie $x \mapsto \psi_x$ jest ciągłe z M z σ -słabą topologią do M_* ze słabą topologią.

Istotnie: mamy

$$\begin{aligned}x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\sigma\text{-słabo}} x &\iff \forall \omega \in M_* \quad \omega(x_\lambda) \xrightarrow[\lambda]{} \omega(x), \\ x\omega_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\text{słabo}} \omega &\iff \forall a \in M \quad \omega_\lambda(a) \xrightarrow[\lambda]{} \omega(a),\end{aligned}$$

Niech więc $x_\lambda \xrightarrow[\lambda]{\sigma\text{-słabo}} x$ w $M_{s.s.}$. Wówczas dla ustalonego $y \in M_{s.s.}$ mamy

$$\Re(\lambda(x_\lambda\Omega|y\Omega)) \xrightarrow[\lambda]{} \Re(\lambda(x\Omega|y\Omega))$$

gdyż $a \mapsto \overline{(a\Omega|y\Omega)}$ jest funkcjonalem σ -słabo ciągłym.

Przypuśćmy, że $\psi \neq \psi_x$ dla wszystkich $x \in M_{s.s.}$, $\|x\| \leq 1$. Wówczas, na mocy twierdzenia Hahna-Banacha, istnieje $h \in M_{s.s.}$ taki, że

$$\psi_x(h) < \psi(h)$$

dla wszystkich $x \in M_{s.s.}$, $\|x\| \leq 1$. Innymi słowy, dla wszystkich takich x mamy

$$\Re(\lambda(x\Omega|h\Omega)) < (x'\Omega|h\Omega)$$

Niech $h = u|h|$ będzie rozkładem biegunowym h . Kładąc $x = u$ w powyższym wzorze otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\Re(\lambda(x\Omega|h\Omega)) &= \Re(\lambda(u\Omega|h\Omega)) < (x'\Omega|h\Omega) \\ &= (\sqrt{x'}\Omega|\sqrt{x'}h\Omega) \\ &= (\sqrt{x'}\Omega|h\sqrt{x'}\Omega) \\ &\leq (\sqrt{x'}\Omega|h|\sqrt{x'}\Omega) \\ &= (\Omega||h|x'\Omega) \\ &= (\sqrt{|h|}\Omega|\sqrt{|h|}x'\Omega) \\ &= (\sqrt{|h|}\Omega|x'\sqrt{|h|}\Omega) \\ &\leq (\sqrt{|h|}\Omega|\sqrt{|h|}\Omega) = (\Omega||h|\Omega) = (u\Omega|h\Omega) = (x\Omega|h\Omega).\end{aligned}$$

²Słaba topologia na M_* jest po prostu obcięciem słabej* topologii na M^* do M_* .

Innymi słowy

$$\Re(\lambda(x\Omega|h\Omega)) < (x\Omega|h\Omega).$$

Ale

$$(x\Omega|h\Omega) = \Re(\lambda(x\Omega|h\Omega)),$$

bo $\Re(\lambda) = 1$, a $(x\Omega|h\Omega) \in \mathbb{R}$. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że musi istnieć $x \in M_{s.s.}$ taki, że $\psi = \psi_x$. $\square$

Wniosek 6.2. Dla każdego $x' \in M'$ istnieje $x \in M$ taki, że

$$Xx'\Omega = x\Omega \quad \text{oraz} \quad Xx'^*\Omega = x^*\Omega.$$

Dowód. Na początek weźmy $x' \in M'_{s.s.}$. Stosujemy lemat 6.1 dla $\lambda = 1$. Mamy więc $x \in M_{s.s.}$ taki, że

$$\Re(x\Omega|y\Omega) = (x'\Omega|y\Omega)$$

dla wszystkich $y \in M_{s.s.}$. Stąd

$$\Re(x\Omega|\eta) = (x'\Omega|\eta)$$

dla wszystkich $\eta \in \mathcal{H}$. Oznacza to, że $x\Omega$ jest rzutem ortogonalnym (dla $\Re(\cdot|\cdot)$) wektora $x'\Omega$ na $\mathcal{H}$, tzn.

$$x\Omega = Px'\Omega.$$

Wiemy już, że $x'\Omega \in (i\mathcal{H})^{\perp_{\Re}}$, a więc $Qx'\Omega = 0$. Stąd

$$Xx'\Omega = (P - Q)x'\Omega = Px'\Omega = x\Omega.$$

Teraz dla $x' = x'_1 + ix'_2$, gdzie $x'_1, x'_2 \in M'_{s.s.}$ o odpowiednich $x_1, x_2 \in M_{s.s.}$ takich, że

$$Xx'_k\Omega = x_k\Omega, \quad k = 1, 2$$

mamy

$$Xx'\Omega = Xx'_1\Omega - iXx'_2\Omega = x_1\Omega - ix_2\Omega = (x_1 - ix_2)\Omega$$

oraz

$$Xx'^*\Omega = Xx'_1\Omega + iXx'_2\Omega = x_1\Omega + ix_2\Omega = (x_1 - ix_2)^*\Omega,$$

więc wystarczy $x = x_1 - ix_2$. $\square$

Stwierdzenie 6.3. Niech $x' \in M'$. Wówczas dla każdej liczby λ takiej, że $\Re\lambda > 0$ istnieje $x \in M$ taki, że

$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR.$$

Dowód. Możemy przyjąć, że $x' \in M'_{s.s.}$, gdyż dowolny element x' jest kombinacją liniową dwóch takich (odpowiedni x będzie wówczas analogiczną kombinacją liniową³). Lemat 6.1 zastosowany do $\bar{\lambda}$ oraz x' produkuje element $\tilde{x} \in M_{s.s.}$ taki, że

$$(x'\Omega|y\Omega) = \Re(\bar{\lambda}(\tilde{x}\Omega|y\Omega))$$

dla wszystkich $y \in M_{s.s.}$. Teraz niech $x = \frac{1}{2}\tilde{x}$. Wówczas

$$(x'\Omega|y\Omega) = \bar{\lambda}(x\Omega|y\Omega) + \lambda(y\Omega|x\Omega)$$

dla wszystkich $y \in M_{s.s.}$. Jeśli teraz $y = y_1 + iy_2$, gdzie $y_1, y_2 \in M_{s.s.}$, to

$$\begin{aligned} (x'\Omega|y\Omega) &= (x'\Omega|y_1 + iy_2\Omega) = (x'\Omega|y_1\Omega) + i(x'\Omega|y_2\Omega) \\ &= \bar{\lambda}(x\Omega|y_1\Omega) + \lambda(y_1\Omega|x\Omega) + i(\bar{\lambda}(x\Omega|y_2\Omega) + \lambda(y_2\Omega|x\Omega)) \\ &= \bar{\lambda}(x\Omega|(y_1 + iy_2)\Omega) + \lambda((y_1 - iy_2)\Omega|x\Omega) \end{aligned}$$

czyli

$$(x'\Omega|y\Omega) = \bar{\lambda}(x\Omega|y\Omega) + \lambda(y^*\Omega|x\Omega)$$

³Jeśli $x' = x'_1 + ix'_2$ przy $x'_1, x'_2 \in M'_{s.s.}$ oraz

$$Xx'_iX = \lambda Rx_i(2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda}(2\mathbb{1} - R)x_iR, \quad (i = 1, 2)$$

dla pewnych $x_1, x_2 \in M_{s.s.}$, to kładąc $x = x_1 - ix_2$ mamy

$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR.$$

dla wszystkich $y \in M$. Wstawiając z^*y w miejsce y otrzymujemy

$$(x'\Omega|z^*y\Omega) = \bar{\lambda}(x\Omega|z^*y\Omega) + \lambda(z\Omega|yx\Omega)$$

czy też

$$(x'z\Omega|y\Omega) = \bar{\lambda}(zx\Omega|y\Omega) + \lambda(z\Omega|yx\Omega) \quad (7)$$

dla wszystkich $y, z \in M$.

Niech $y', z' \in M'$. Na mocy wniosku 6.2 istnieją $y, z \in M$ takie, że

$$Xy'\Omega = y\Omega, \quad Xz'\Omega = z\Omega.$$

Dla takich y, z mamy dzięki (7)

$$(x'Xz'\Omega|Xy'\Omega) = \bar{\lambda}(zx\Omega|Xy'\Omega) + \lambda(Xz'\Omega|yx\Omega).$$

Przekształcamy to równanie (pamiętając, że $x' = x'^*$)

$$\begin{aligned} (TJz'\Omega|x'TJy'\Omega) &= \bar{\lambda}(zx\Omega|JT y'\Omega) + \lambda(JT z'\Omega|yx\Omega), \\ (Jz'\Omega|Tx'TJy'\Omega) &= \bar{\lambda}(Ty'\Omega|Jzx\Omega) + \lambda(Jyx\Omega|Tz'\Omega), \\ (JT x'TJy'\Omega|z'\Omega) &= \bar{\lambda}(y'\Omega|TJzx\Omega) + \lambda(TJyx\Omega|z'\Omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Przypominamy teraz, że

- dla $u \in M_{\text{s.s.}}$ mamy $Pu\Omega = u\Omega$, a więc

$$TJu\Omega = Xu\Omega = (P - Q)u\Omega = (2\mathbb{1} - P - Q)u\Omega = (2\mathbb{1} - R)u\Omega.$$

- dla $u' \in M'_{\text{s.s.}}$ mamy $Qu'\Omega = 0$, więc

$$TJu'\Omega = Xu'\Omega = (P - Q)u'\Omega = (P + Q)u'\Omega = Ru'\Omega.$$

Stąd wynika, że

- dla $u \in M$ mamy

$$TJu\Omega = (2\mathbb{1} - R)u^*\Omega.$$

- dla $u' \in M'$

$$TJu'\Omega = Ru'^*\Omega.$$

W świetle powyższych faktów mamy (nadal $x = x^*$)

$$TJzx\Omega = (2\mathbb{1} - R)x^*z^*\Omega = (2\mathbb{1} - R)xXz'^*\Omega = (2\mathbb{1} - R)xTJz'\Omega = (2\mathbb{1} - R)xRz'\Omega.$$

$$TJyx\Omega = (2\mathbb{1} - R)x^*y^*\Omega = (2\mathbb{1} - R)x^*Xy'^*\Omega = (2\mathbb{1} - R)xTJy'\Omega = (2\mathbb{1} - R)xRy'\Omega.$$

Wstawiamy tę informację do ostatniego z równań (8):

$$(JT x'TJy'\Omega|z'\Omega) = \bar{\lambda}(y'\Omega|TJzx\Omega) + \lambda(TJyx\Omega|z'\Omega),$$

$$(JT x'TJy'\Omega|z'\Omega) = \bar{\lambda}(y'\Omega|(2\mathbb{1} - R)xRz'\Omega) + \lambda((2\mathbb{1} - R)xRy'\Omega|z'\Omega),$$

Skoro podprzestrzeń $M'\Omega$ jest gęsta w H mamy

$$(Xx'X\eta|\zeta) = (JT x'TJ\eta|\zeta) = \bar{\lambda}(\eta|(2\mathbb{1} - R)xR\zeta) + \lambda((2\mathbb{1} - R)xR\eta|\zeta),$$

czyli ($x = x^*$)

$$(Xx'X\eta|\zeta) = (\lambda Rx(2\mathbb{1} - R)\eta|\zeta) + (\bar{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR\eta|\zeta),$$

co daje

$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR.$$

□

Stwierdzenie 6.4. Niech $\lambda = e^{i\frac{\phi}{2}}$ dla pewnego $\phi \in]-\pi, \pi[$. Weźmy $x' \in M'$ i niech $x \in M$ będzie taki, że

$$Xx'X = \lambda Rx(2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda}(2\mathbb{1} - R)xR.$$

Wówczas

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} Jx' J \Delta^{-it} dt.$$

Dowód. Ustalmy $\xi, \eta \in H$ i zdefiniujmy funkcję $f: \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| \leq \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$ kładąc

$$f(z) = \left(\eta \left| R^{z+\frac{1}{2}} (2\mathbb{1} - R)^{-z+\frac{1}{2}} x (2\mathbb{1} - R)^{z+\frac{1}{2}} R^{-z+\frac{1}{2}} \xi \right. \right).$$

(Pamiętamy funkcja $w \mapsto A^{iw}$ jest dobrze określona dla $\Im w \leq 0$ i holomorficzna dla $\Im w < 0$. Mamy $z + \frac{1}{2} = i(-iz - \frac{i}{2})$ oraz $-z + \frac{1}{2} = i(iz - \frac{i}{2})$ tak więc oba wykładniki są postaci iw dla pewnego w takiego, że $\Im w \leq 0$.) Funkcja f jest ciągła i ograniczona na pionowym pasku $\{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}$ i holomorficzna na jego wnętrzu.

Zauważmy dalej, że

$$\begin{aligned} \lambda f(it + \tfrac{1}{2}) &= \lambda \left(\eta \left| \Delta^{it} R x (2\mathbb{1} - R) \Delta^{-it} \xi \right. \right), \\ \bar{\lambda} f(it - \tfrac{1}{2}) &= \bar{\lambda} \left(\eta \left| \Delta^{it} (2\mathbb{1} - R) x R \Delta^{-it} \xi \right. \right). \end{aligned}$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Na mocy twierdzenia DI.3 mamy

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} (\lambda f(it + \tfrac{1}{2}) + \bar{\lambda} f(it - \tfrac{1}{2})) dt$$

Z jednej strony

$$f(0) = \left(\eta \left| R^{\frac{1}{2}} (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}} x (2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} \xi \right. \right) = (T\eta | x T \xi),$$

a z drugiej

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} (\lambda f(it + \tfrac{1}{2}) + \bar{\lambda} f(it - \tfrac{1}{2})) dt \\ &= \left(\eta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} (\lambda R x (2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda} (2\mathbb{1} - R) x R) \Delta^{-it} dt \xi \right. \right) \\ &= \left(\eta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} X x' X \Delta^{-it} dt \xi \right. \right) \\ &= \left(\eta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} T J x' J T \Delta^{-it} dt \xi \right. \right) \\ &= \left(T \eta \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} J x' J T \Delta^{-it} dt T \xi \right. \right). \end{aligned}$$

Tak więc

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} J x' J \Delta^{-it} dt,$$

gdyż obraz operatora T jest gęsty w H . □

Stwierdzenie 6.5. Dla każdego $x' \in M'$ i dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\Delta^{it} J x' J \Delta^{-it} \in M. \tag{9}$$

Dowód. Ustalmy x' . Dla $\lambda = e^{\frac{\phi}{2}}$ przy $\phi \in]-\pi, \pi[$ niech $x \in M$ będzie taki, że

$$X x' X = \lambda R x (2\mathbb{1} - R) + \bar{\lambda} (2\mathbb{1} - R) x R.$$

Niech $y' \in M'$ oraz $\xi, \eta \in H$ i niech

$$g(t) = (\eta | y' \Delta^{it} J x' J \Delta^{-it} \xi) - (\eta | \Delta^{it} J x' J \Delta^{-it} y' \xi).$$

Na mocy wzoru

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \Delta^{it} J x' J \Delta^{-it} dt$$

mamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} g(t) dt = 0,$$

dla dowolnego $\phi \in]-\pi, \pi[$, bo y' komutuje z x .

Wynika stąd, że $g = 0$. Istotnie, jeśli zdefiniujemy

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-zt}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} g(t) dt$$

dla z takich, że $|\Re z| < \pi$, to f będzie funkcją holomorficzną w tym obszarze, znikającą dla $z \in]-\pi, \pi[$. Wówczas f jest tożsamościowo równa zero. W szczególności $f(is) = 0$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$, czyli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ist}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} g(t) dt = 0$$

dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$. To oznacza, że funkcja,

$$t \mapsto \frac{g(t)}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}$$

ma zerową transformatę Fouriera. Tak więc $g = 0$ i jest tak dla wszystkich $\xi, \eta \in H$. Stąd y' komutuje z $\Delta^{it} J x' J \Delta^{-it}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Wniosek 6.6. *Mamy $JM'J \subset M$.*

Dowód. Kładziemy $t = 0$ we wzorze (9). $\square$

Stwierdzenie 6.7. *Mamy $JMJ \subset M'$.*

Dowód. Na początek wykażemy, że $J\Omega = \Omega$. Mamy $\Omega \in M\Omega \subset \mathcal{K}$, ale też $\Omega \in M'\Omega \subset (i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}}$. Tak więc $\Omega \in \mathcal{K} \cap i\mathcal{K}^{\perp_{\Re}}$. Stąd $P\Omega = \Omega$ i $Q\Omega = 0$. Tym samym

$$R\Omega = \Omega \quad \text{oraz} \quad X\Omega = \Omega.$$

Skoro $T = R^{\frac{1}{2}}(2\mathbb{1} - R)^{\frac{1}{2}}$, również $T\Omega = \Omega$, a więc $(X = JT)$ mamy $J\Omega = \Omega$.

Dalej Zauważmy, że skoro $J\mathcal{K} = (i\mathcal{K})^{\perp_{\Re}}$, dla każdego $x, y \in M_{s.s.}$ mamy

$$(y\Omega | Jx\Omega) \in \mathbb{R}.$$

Istotnie: $(y\Omega | Jx\Omega) = \Re(y\Omega | Jx\Omega) + i\Im(y\Omega | Jx\Omega)$, a

$$\Im(y\Omega | Jx\Omega) = \Re(iy\Omega | Jx\Omega) = 0.$$

Mamy dalej, na mocy samosprężoności J ,

$$(y\Omega | Jx\Omega) = (Jx\Omega | y\Omega) = (Jy\Omega | x\Omega).$$

Teraz przekształcamy obie strony tego wzoru

$$\begin{aligned} (y\Omega | Jx\Omega) &= (Jy\Omega | x\Omega), \\ (y\Omega | JxJ\Omega) &= (JyJ\Omega | x\Omega), \\ (\Omega | yJxJ\Omega) &= (xJyJ\Omega | \Omega) \end{aligned}$$

(x i y są samosprężone). Teraz dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M_{s.s.}$ i $x = x_1 + ix_2$, $y = x_1 + iy_2$ mamy

$$\begin{aligned}
(\Omega|yJxJ\Omega) &= (\Omega|(y_1 + iy_2)JxJ\Omega) \\
&= (\Omega|y_1JxJ\Omega) + i(\Omega|y_2JxJ\Omega) \\
&= (\Omega|y_1J(x_1 + ix_2)J\Omega) + i(\Omega|y_2J(x_1 + ix_2)J\Omega) \\
&= (\Omega|y_1Jx_1J\Omega) - i(\Omega|y_1Jx_2J\Omega) + i(\Omega|y_2Jx_1J\Omega) + (\Omega|y_2Jx_2J\Omega) \\
&= (x_1Jy_1J\Omega|\Omega) - i(x_2Jy_1J\Omega|\Omega) + i(x_1Jy_2J\Omega|\Omega) + (x_2Jy_2J\Omega|\Omega) \\
&= ((x_1 + ix_2)Jy_1J\Omega|\Omega) + ((x_1 + ix_2)Jiy_2J\Omega|\Omega) \\
&= (xJyJ\Omega|\Omega),
\end{aligned}$$

czyli

$$(\Omega|yJxJ\Omega) = (xJyJ\Omega|\Omega)$$

dla wszystkich $x, y \in M$. Na mocy wniosku (6.6) możemy zamiast y położyć $yJy'J$ dla dowolnego $y' \in M'$. Zatem

$$(\Omega|y(Jy'J)(JxJ)\Omega) = (x(JyJ)y'JJ\Omega|\Omega)$$

dla dowolnych $x, y \in M$ oraz $y' \in M'$. Przyjmując ponownie, że x i y są samosprężone możemy nieco uprościć powyższe wyrażenie, gdyż wtedy lewa strona jest równa

$$(\Omega|yJy'x\Omega) = (y\Omega|Jy'x\Omega) = (y'x\Omega|Jy\Omega) = (xy'\Omega|Jy\Omega) = (xy'\Omega|JyJ\Omega) = (y'\Omega|xJyJ\Omega),$$

natomiast prawa

$$(x(JyJ)y'\Omega|\Omega) = (JyJy'\Omega|x\Omega) = (Jx\Omega|yJy'\Omega) = (yJx\Omega|Jy'\Omega) = (y'\Omega|JyJx\Omega).$$

Tym samym

$$(y'\Omega|xJyJ\Omega) = (y'\Omega|JyJx\Omega).$$

dla wszystkich $x, y \in M_{s.s.}$ i $y' \in M'$. Skoro $M'\Omega$ jest gęstą podprzestrzenią w H otrzymujemy

$$xJyJ\Omega = JyJx\Omega.$$

Dla wszystkich $x, y \in M_{s.s.}$. Podobnie jak poprzednio znajdujemy, że powyższa równość zachodzi dla wszystkich $x, y \in M$.

Teraz wstawiamy xz zamiast z (dla $z \in M$), by otrzymać

$$xzJyJ\Omega = JyJxz\Omega.$$

Ale $zJyJ\Omega = JyJz\Omega$, czyli mamy

$$xJyJz\Omega = JyJxz\Omega.$$

dla wszystkich $x, y, z \in M$. Skoro $\overline{M\Omega} = H$, dostajemy

$$xJyJ = JyJx$$

dla wszystkich $x, y \in M$. W szczególności $JMJ \subset M'$. □

Dowód twierdzenia 5.1. Punkt (2) wynika z wniosku 6.6 i stwierdzenia 6.7. Teraz punkt (1) wynika ze stwierdzenia 6.5. □

Twierdzenie 6.8. Niech M będzie algebrą von Neumanna i niech ω będzie wiernym stanem normalnym na M . Wówczas istnieje jedyna σ -słabo ciągła jednoparametrowa grupa $(\sigma_t^\omega)_{t \in \mathbb{R}}$ automorfizmów M spełniająca warunek $K.M.S.$ względem ω , tj. taka, że dla dowolnych $x, y \in M$ istnieje ciągła i ograniczona funkcja

$$f: \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

holomorficzna na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$ taka, że

$$f(t) = \omega(y\sigma_t^\omega(x)),$$

$$f(t+i) = \omega(\sigma_t^\omega(x)y)$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Jeśli ω jest postaci

$$\omega(a) = (\Omega|a\Omega), \quad (a \in M),$$

dla cyklicznego i separującego wektora Ω , wówczas dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$

$$\sigma_t^\omega(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$$

gdzie $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ jest grupą modularną stowarzyszoną z rzeczywistą podprzestrzenią $\mathcal{K} = \overline{M\Omega}$.

Dowód. Ponieważ reprezentacja GNS związana ze stanem ω jest normalnym izomorfizmem (na swój obraz) możemy założyć, że $M \subset B(H)$ i ω jest postaci $\omega(a) = (\Omega|a\Omega)$ dla pewnego wektora $\Omega \in H$ cyklicznego i separującego dla M .

Niech $\mathcal{K} = \overline{M_{s.s.}\Omega}$ i niech $(\Delta^{it})_{t \in \mathbb{R}}$ będzie stowarzyszoną grupą modularną. Wówczas możemy dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zdefiniować automorfizm σ_t^ω algebry M kładąc

$$\sigma_t^\omega(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}.$$

Jest jasne, że dla ustalonego $x \in M$ funkcja $t \mapsto \sigma_t^\omega(x)$ jest σ -słabo ciągła (jest ewidentnie mocno ciągła w topologii $B(H)$). Jest również jasne, że $(\sigma_t^\omega)_{t \in \mathbb{R}}$ jest jednoparametrową grupą automorfizmów M .

Przypomnijmy, że $R\Omega = \Omega$, więc $\Delta^{it}\Omega = \Omega$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Dla $x, y \in M_{s.s.}$ para wektorów $(y\Omega, x\Omega)$ należy do $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$, a więc istnieje odpowiadająca im funkcja K.M.S. $f: \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \Im z \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ (ciągła i ograniczona, holomorficzna na wnętrzu paska). Mamy dla $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = (y\Omega | \Delta^{it} x \Omega) = f(t) = (y\Omega | \Delta^{it} x \Delta^{-it} \Omega) = \omega(y \sigma_t^\omega(x))$$

oraz

$$f(t+i) = \overline{f(t)} = \overline{\omega(y \sigma_t^\omega(x))} = \omega((y \sigma_t^\omega(x))^*) = \omega(\sigma_t^\omega(x) y)$$

Teraz niech $a, b \in M$ i $a = x_1 + ix_2$, $b = y_1 + iy_2$, dla $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M_{s.s.}$. Niech $f_{i,j}$ będzie odpowiednią funkcją K.M.S. dla (y_i, x_j) przy $i, j = 1, 2$:

$$f_{i,j}(t) = \omega(y_i \sigma_t^\omega(x_j)), \quad f_{i,j}(t+i) = \omega(\sigma_t^\omega(x_j) y_i).$$

Wówczas $f = f_{1,1} - f_{2,2} + i(f_{1,2} + f_{2,1})$ jest funkcją K.M.S. dla (y, x) :

$$f(t) = \omega(y \sigma_t^\omega(x)), \quad f(t+i) = \omega(\sigma_t^\omega(x) y).$$

Innymi słowy $(\sigma_t^\omega)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem ω .

Niech teraz $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$ będzie jednoparametrową grupą automorfizmów M spełniającą warunek K.M.S. względem ω . Wówczas stan ω jest niezmienniczy dla $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$: kładąc $y = 1$ w warunku K.M.S. uzyskujemy ciągłą i ograniczoną funkcję f na pasku taką, że $f(t) = f(t+i)$ dla wszystkich t — funkcja taka musi być stała.

Definiujemy wówczas jednoparametrową mocno ciągłą grupę $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ operatorów unitarnych na H wzorem

$$U_t x \Omega = \alpha_t(x) \Omega$$

(unitarność wynika z niezmienniczości ω):

$$(U_t x \Omega | U_t y \Omega) = (\Omega | \alpha_t(x^* y) \Omega) = \omega(\alpha_t(x^* y)) = \omega(x^* y) = (x \Omega | y \Omega),$$

a ciągłość wynika z ciągłości $(\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Skoro dla każdego $x, y \in M$ mamy funkcję f taką, że

$$f(t) = \omega(y \alpha_t(x)), \quad f(t+i) = \omega(\alpha_t(x) y),$$

biorąc $x = x^*$ i $y = y^*$ otrzymujemy $f(t+i) = \overline{f(t)}$. Innymi słowy grupa $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$ spełnia warunek K.M.S. względem podprzestrzeni $\mathcal{K}_0 = M_{s.s.}\Omega$. Z twierdzenia 4.6 wynika, że $U_t = \Delta^{it}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. $\square$

DODATEK I: KILKA SŁÓW O FUNKCJACH HOŁOMORFICZNYCH

Twierdzenie DI.1 (Hadamard). *Niech $P = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i niech*

$$f: P \longrightarrow \mathbb{C}$$

będzie ciągłą i ograniczoną funkcją, holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$. Niech

$$A = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \quad B = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t + i)|.$$

Wówczas dla dowolnego $z \in P$ mamy

$$|f(z)| \leq A^{1-\Im z} B^{\Im z}.$$

Dowód. Rozważmy funkcję

$$\varphi: z \longmapsto f(z) A^{-(1+iz)} B^{iz}$$

Jest ona ciągła na P i analityczna na wnętrzu P . Ponadto

$$A^{-(1+iz)} B^{iz} = \exp(-(1+iz) \log A + iz \log B),$$

czyli

$$|\varphi(z)| = |f(z)| \exp((\Im z - 1) \log A - \Im z \log B) = |f(z)| A^{(\Im z - 1)} B^{-\Im z}.$$

Zatem φ jest ograniczona na P oraz

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t + i)| = 1.$$

Wykażemy, że $|\varphi(z)| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. Jeśli $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, to fakt ten wynika z zasady maksimum.⁴

Jeśli $\varphi(z)$ nie dąży do 0 w nieskończoności, rozważmy

$$\varphi_n(z) = \varphi(z) \exp\left(\frac{-1-z^2}{n}\right).$$

Mamy $|\exp(\frac{-1-z^2}{n})| = \exp(\frac{(\Im z)^2 - 1 - (\Re z)^2}{n}) \leq 1$ i oczywiście

$$\varphi_n(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem $|\varphi_n(z)| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. Ponato $\varphi_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(z)$, z więc mamy także $|\varphi_n(z)| \leq 1$ dla wszystkich $z \in P$. $\square$

Ponieważ dla $A, B > 0$ funkcja

$$u: [0, 1] \ni \theta \longmapsto A^{1-\theta} B^\theta$$

jest wypkła ($u'' = (\log B - \log A)^2 u > 0$), mamy $u(\theta) \leq \max\{u(0), u(1)\}$, a więc dostajemy

Wniosek DI.2. *Niech $P = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Im z \leq 1\}$ i niech*

$$f: P \longrightarrow \mathbb{C}$$

będzie ciągłą i ograniczoną funkcją, holomorficzną na $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Im z < 1\}$. Wówczas dla każdego $z \in P$

$$|f(z)| \leq \max\left\{\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|, \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t + i)|\right\}.$$

Twierdzenie DI.3. *Niech $\lambda = e^{i\frac{\phi}{2}}$ dla pewnego $\phi \in]-\pi, \pi[$. Niech f będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na pasku $\{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}$, holomorficzną na jego wnętrzu. Wówczas*

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \left(\lambda f(it + \frac{1}{2}) + \bar{\lambda} f(it - \frac{1}{2}) \right) dt$$

⁴Przez $\varphi(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ rozumiemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje R takie, że $|z| > R$ implikuje $|\varphi(z)| < \varepsilon$.

Dowód. Definiujemy $g(z) = \pi e^{i\phi z} \frac{f(z)}{\sin \pi z}$. Wówczas g ma biegun pierwszego rzędu w $z = 0$ z residuum $f(0)$. Ponadto $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, bo f jest ograniczona, a $|\phi| < \pi$. Zatem

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(it + \frac{1}{2}) i dt - \int_{-\infty}^{+\infty} g(it - \frac{1}{2}) i dt \right).$$

Wzór, którego dowodzimy wynika z faktu, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} g(it + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{i} \lambda \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} f(it + \frac{1}{2}), \\ -\frac{1}{2\pi i} g(it - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{i} \bar{\lambda} \frac{e^{-\phi t}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} f(it - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

□

DODATEK II: ROZKŁAD BIEGUNOWY NAD $\mathbb{R}$

Klasyczny wynik na temat rozkładu biegunowego można sformułować następująco:

Twierdzenie DII.1. *Niech H będzie zespoloną przestrzenią Hilberta i niech $T \in B(H)$. Wówczas istnieje dokładnie jedna para operatorów (u, t) taka, że*

- $t \geq 0$,
- $T = ut$,
- $u^*u = \chi(t > 0)$.

Ponadto $t = f(T)$, gdzie $f(r) = |r|$ dla wszystkich $r \in \mathbb{R}$.

Przypomnijmy, że z faktu, że u^*u jest rzutem wynika, że uu^* także jest rzutem, a więc u jest częściową izometrią. Tradycyjnie piszemy rozkład biegunowy jako $T = u|T|$.

Jeśli T w powyższym twierdzeniu jest operatorem samosprężonym (czy choć normalnym), to także u jest funkcją od T . W szczególności T , $|T|$ i u są parami przemienne. Pamiętamy, że u^*u jest rzutem na dopełnienie ortogonalne $\ker |T| = \ker T$. Gdy T jest samosprężony, to $\ker T$ jest dopełnieniem ortogonalnym obrazu T . W szczególności jeśli $\ker T = \{0\}$, to u jest operatorem unitarnym. Łatwo również sprawdzić, że u jest operatorem samosprężonym (u jest funkcją od T przyjmującą jedynie rzeczywiste wartości). Tak więc mamy następującą wersję twierdzenia o rozkładzie biegunowym dla operatora samosprężonego o trywialnym jądrze:

*Niech T będzie samosprężonym operatorem na zespolonej przestrzeni Hilberta H takim, że $\ker T = \{0\}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden operator u taki, że $u^*u = \mathbb{1}$ oraz $T = u|T|$. Ponadto u jest przemienne z T i $|T|$ oraz $u^2 = \mathbb{1}$.*

Rozważmy teraz wersję powyższego twierdzenia dla rzeczywistych przestrzeni Hilberta. Niech $\mathcal{H}$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Wówczas możemy rozważyć jej kompleksyfikację $H = \mathcal{H} + i\mathcal{H}$, którą jako przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$ identyfikujemy z sumą prostą dwóch kopii $\mathcal{H}$, a strukturę zespolonej przestrzeni Hilberta nadajemy jej w następujący sposób: piszemy $\xi_1 + i\xi_2$ zamiast (ξ_1, ξ_2) i kładziemy

$$\begin{aligned} i(\xi_1 + i\xi_2) &= -\xi_2 + i\xi_1, & \xi_1, \xi_2 &\in \mathcal{H}, \\ (\xi_1 + i\xi_2 | \eta_1 + i\eta_2)_H &= (\xi_1 | \eta_1)_{\mathcal{H}} + (\xi_2 | \eta_2)_{\mathcal{H}} + i((\xi_1 | \eta_2)_{\mathcal{H}} - (\xi_2 | \eta_1)_{\mathcal{H}}) & \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 &\in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

Możemy teraz rozważyć odwzorowanie

$$\iota: B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(H)$$

dane przez $\iota(a)(\xi_1 + i\xi_2) = a\xi_1 + ia\xi_2$. Jest ono $\mathbb{R}$ -liniowe i masyplikatywne. Ponadto $\iota(a)^* = \iota(a^*)$ (sprzężenie po lewej stronie jest względem zespolonego iloczynu skalarnego na H , a po prawej względem rzeczywistego iloczynu skalarnego na $\mathcal{H}$). Łatwo również sprawdzić bezpośrednio, że zachowuje ono dodatniość (definiowaną w $B(\mathcal{H})$ i $B(H)$ przez elementy macierzowe względem odpowiednich iloczynów skalarnych).

Zauważmy wreszcie, że łatwo opisać obraz odwzorowania ι . Niech P będzie operatorem

$$H \ni \xi_1 + i\xi_2 \longmapsto \xi_1 + i0.$$

Wówczas P jest rzutem ortogonalnym na rzeczywistą podprzestrzeń $\{\xi_1 + i0 \mid \xi_1 \in \mathcal{K}\} \subset H$ względem iloczynu skalarnego $\Re(\cdot|\cdot)_H$. Nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że operator $S \in B(H)$ jest w obrazie odwzorowania ι wtedy i tylko wtedy, gdy $PS = SP$.

Niech teraz X będzie samosprężonym operatorem na $\mathcal{K}$ i roważmy jego rozkład biegunowy $\iota(X) = u|\iota(X)|$. Ponieważ $\iota(X)$ komutuje z P , to samo jest prawdą dla $|\iota(X)|$ (bo jest to grabica wielomianów od $\iota(X)$) i u . Stąd

$$|\iota(X)| = \iota(T), \quad u = \iota(J)$$

dla pewnych operatorów $T, J \in B(\mathcal{K})$. Jest jasne, że $X = JT$ oraz, że T jest dodatni (i samosprężony). Ponadto T i J komutują z X , a operator J jest samosprężony i spełnia $J^2 = 1$.